PROBABILIDADES - 2º Ano MAEG 30. 03. 2017

Nome:____**Número:**________

Cotação: (**Espaço reservado para classificações**)				
1. (10)	**2a. (15)**	**3a.(15)**	**4.a (15)**	**5. (10)**
	2b. (10)	**3b.(10)**	**4.b (15)**	

Nota: todas as questões devem ser devidamente formalizadas e justificadas.

1. **[10]** Uma editora dispõe de 3 estratégias para incrementar as vendas de livros: publicidade, grafismo melhorado (impressão a cores, ilustrações,…) ou promoção de sessões de autográfos com o autor. Dados os custos envolvidos, só se promovem simultaneamente as 3 estratégias para 2% dos livros. Sabe-se ainda que 90% dos livros são acompanhados de publicidade e que, **destes**, 20% são lançados com sessões de autógrafos. Sabendo que um livro vai ser lançado com publicidade e sessão de autógrafos, qual a probabilidade de ele beneficiar de um grafismo melhorado?

Sejam P, G e A os acontecimentos "Publicidade", "Grafismo Especial" e "Sessões de Autógrafos" respectivamente.

Sabe-se que $P(P\cap G\cap A)=0.02$, $P(P)=0.9$ e $P(A\mid P)=0.2$
Pede-se $P(G\mid P\cap A)$

Pela definição de probabilidade condicionada vem $P(G\mid P\cap A)=\dfrac{P(G\cap P\cap A)}{P(P\cap A)}=\dfrac{0.02}{0.18}=\dfrac{1}{9}=0.111$

já que $P(P\cap A)=P(A\mid P)\times P(P)=0.9\times 0.2=0.18$

2. Seja a variável aleatória X com função densidade: $f_X(x)=\begin{cases}x^2/9 & (0<x<3)\\ 0 & (\text{outros valores de } x)\end{cases}$.

a. **[15]** Calcule $P(X<2)$ e obtenha a mediana da distribuição.

$$P(X<2)=\int_{-\infty}^{2} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0}0\,dx+\int_{0}^{2}\frac{x^2}{9}dx=0+\left(\frac{x^3}{27}\right]_0^2=\frac{8}{27}=0.2963$$

A mediana será o valor m tal que $0.5=\int_0^m\frac{x^2}{9}dx=\left(\frac{x^3}{27}\right]_0^m=\frac{m^3}{27}$ logo $m=\sqrt[3]{13.5}=2.3811$

b. **[10]** Obtenha a função densidade de $Y=\dfrac{X}{3}-1$.

$y=\dfrac{x}{3}-1\Leftrightarrow x=3(y+1)$ e portanto $\dfrac{dx}{dy}=3$.

$x=0\to y=-1$; $x=3\to y=0$

Assim $f_Y(y)=\dfrac{\left(3(y+1)\right)^2}{9}\times 3=3(y+1)^2$, $-1<y<0$

3. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional discreta com a seguinte função probabilidade

x\y	0	1	2
-1	0.05	0.20	0.15
0	0.10	0.10	0.10
1	0.05	0.20	0.05

a. **[15]** Calcule $P(X \geq 0)$ e $P(X \geq 0 | Y = 1)$. Será que o resultado obtido lhe permite concluir sobre a independência das variáveis? Justifique.

$$P(X \geq 0) = 1 - P(X = -1) = 1 - (0.05 + 0.20 + 0.15) = 0.6$$

$$P(X \geq 0 | Y = 1) = \frac{P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{0.10 + 0.20}{0.20 + 0.10 + 0.20} = \frac{3}{5} = 0.6$$

Não, já que se trata de um caso particular. Se $P(X \geq 0)$ e $P(X \geq 0 | Y = 1)$ viessem diferentes poderiamos concluir que as v.a. não são independentes mas ao obter probabulidades iguais nada se pode concluir apenas com este resultado.

b. **[10]** Calcule $\mathrm{var}(X)$ e $E(XY)$.

$E(X) = -1 \times 0.4 + 0 \times 0.3 + 1 \times 0.3 = -0.1$; $E(X^2) = -1^2 \times 0.4 + 0^2 \times 0.3 + 1^2 \times 0.3 = 0.7$ logo

$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - E^2(X) = 0.7 - (-0.1)^2 = 0.69$

$E(X\,Y) = (-1) \times 0.2 + (-2) \times 0.15 + 1 \times 0.2 + 2 \times 0.05 = -0.2$

4. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função de densidade conjunta dada por $f(x,y) = \frac{2y}{9}$, $0 < y < x < 3$.

a. **[15]** Obtenha as funções densidade marginais de X e Y. Obtenha também a função densidade de Y condicionada por $X = x$.

$$f_X(x) = \int_0^x \frac{2}{9} y\, dy = \left(\frac{y^2}{9}\right]_0^x = \frac{x^2}{9},\ 0 < x < 3$$

$$f_Y(y) = \int_y^3 \frac{2}{9} y\, dx = \frac{2y}{9}(x]_y^3 = \frac{2y(3-y)}{9},\ 0 < y < 3$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{(2/9)\,y}{(1/9)\,x^2} = \frac{2y}{x^2},\ 0 < y < x,\ 0 < x < 3 \text{ com } x \text{ fixo.}$$

b. **[15]** Calcule $P(X > 2, Y > 1)$ e $P(Y < 1 | X = 2)$.

$$P(X > 2, Y > 1) = \int_2^3 \int_1^x \frac{2}{9} y\, dy\, dx = \int_2^3 \left(\frac{y^2}{9}\right]_1^x dy = \int_2^3 \left(\frac{x^2}{9} - \frac{1}{9}\right) dy = \left(\frac{x^3}{27} - \frac{x}{9}\right]_2^3 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{8}{27} - \frac{2}{9}\right) = \frac{16}{27}$$

$$P(Y < 1 | X = 2) = \int_0^1 f_{Y|X}(y|2)\, dy = \int_0^1 \frac{2y}{4} dy = \left(\frac{y^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

5. **[10]** Assumindo que a variável X tem média μ e variância σ^2, prove a desigualdade de Chebychev.

Parte-se da desiguialdade de Markov e faz-se $\psi(X) = (X - \mu)^2$ e $c = t^2 \sigma^2$. Como X tem variância, $E(\psi(X)) = E(X - \mu)^2 = \sigma^2$ existe e portanto

$$P(\psi(X) \geq c) \leq \frac{E(\psi(X))}{c} \Leftrightarrow P\left((X - \mu)^2 \geq t^2 \sigma^2\right) \leq \frac{\sigma^2}{t^2 \sigma^2} \Leftrightarrow P\left(|X - \mu| \geq t\sigma\right) \leq \frac{1}{t^2}.$$

Formulário auxiliar prova intercalar

PROBABILIDADE

- $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid A \cap B)$
- Sendo $\{A_1, A_2, ..\}$ uma partição do espaço dos resultados com $P(A_j) > 0$, $j = 1,2,...$,

$$P(B) = \sum_j P(A_j)P(B \mid A_j) \quad ; \quad P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum_i P(A_i)P(B \mid A_i)}.$$

VALOR ESPERADO, MOMENTOS E PARÂMETROS

	Discretas	Contínuas
$E[\psi(X)] =$	$\sum_x \psi(x) f_X(x)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) f_X(x)\, dx$
$E[\psi(X,Y)] =$	$\sum_x \sum_y \psi(x,y) f_{X,Y}(x,y)$	$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x,y) f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$
$E[\psi(X,Y) \mid X = x] =$	$\sum_y \psi(x,y) f_{Y\mid X=x}(y)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x,y) f_{Y\mid X=x}(y) dy$

Momentos de ordem k	$\mu'_k = E(X^k)$	$\mu_k = E[(X-\mu)^k]$
Momentos de ordem *r+s*	$\mu'_{rs} = E(X^r Y^s)$	$\mu_{rs} = E\{(X-\mu_X)^r (Y-\mu_Y)^s\}$

$\mathrm{Var}(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$;

$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\} = E(XY) - E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

$\mathrm{E}(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$ e $\mathrm{Var}(aX+bY) = a^2\mathrm{Var}(X) + b^2\mathrm{Var}(Y) + 2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$ com *a*, *b* constantes

$E(Y) = E_X[E(Y \mid X)]$; $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}_X[E(Y \mid X)] + E_X[\mathrm{Var}(Y \mid X)]$

Coeficiente de assimetria: $\gamma_1 = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$; *Kurtosis*: $\beta_2 = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4}$

Quantil (caso contínuo): $\xi_\alpha : \int_{-\infty}^{\xi_\alpha} f(x)dx = \alpha \Leftrightarrow F(\xi_\alpha) = \alpha$

Função geradora de momentos: $M_X(s) = E(e^{sX})$; $E(X^r) = M_X{}^{(r)}(0)$

Desigualdades

- Desigualdade de Markov – Seja $\psi(X) \geq 0$ função (mensurável) da v.a. X; Se existir $E(\psi(X))$, vem, para qualquer número real $c > 0$, $P(\psi(X) \geq c) \leq \dfrac{E(\psi(X))}{c}$.

- Desigualdade de Chebychev – Se X é uma v.a. com média μ e variância σ^2 vem para qualquer $t > 0$, $P(|X-\mu| \geq t\sigma) \leq 1/t^2$.